８．「級数」と「関数の巾級数展開」を考える

飯島

８－０　はじめに

前回は，「アバウト」感覚での微分と積分を扱いました。実際には，適切な「問題」があり，仮説を立てたりしながら，取り組んでみることをしないと，道具としてのコンピュータが数学にとってどう役立つのか分かりにくい部分はあるのですが，まあ，その辺は，後期に考えることとして，まずは，「できそうなこと」をいろいろと試してみることを優先してみることにしましょう。

さて，今回の話題は，「級数」と「巾級数展開」，つまり，マクローリン展開です。

関数には，いろいろなものがありえます。しかし，それらを多項式で近似してみようという精神が導関数および，高階の微分であり，その極限として，巾級数と一致するとしたら，いろいろなことが便利になります。項別の微積分が可能であれば，

基本的に，公式は「$(x^n)' = nx^{n-1}$」だけでいい

ことにもなります。

これらのことについて，多分，微積分の授業としては，理論的に組み立てて理解してきた「はず」でしょうが，どういう感じになるのかを，実験的に納得してみるのも，一つの手だと思います。そういう意味で，この素材を楽しんでみてください。

８－１　級数の収束を調べる

例１　等差数列　$a_n = 3n - 2$　に対して，$S_n = \Sigma a_n$ とするとき，$S = \lim S_n$ を求めてみましょう。

```
CLS
INPUT "last = "; last
sum = 0
FOR n = 1 to last
    a = 3 * n - 2
    sum = sum + a
    PRINT "n = "; n ; ",  S(n) = "; sum
NEXT
```

そう，これは計算するまでもないことですが，「　　　」しますね。

問題１　初項１，公比1/2 の等比数列 $\{a_n\}$ に対して，その和の極限値を求めよ。

問題２　$S(n)=\Sigma(1/k^2)$ は「　　　　　」しますよね。これが実際にそうなることを数値的に確認したいと思います。

(1)　ｎをいくつくらいまで計算すると実感できるか予想せよ。　ｎ＝

(2)　プログラムを作れ。

(3)　ｎがいくつ以上になると実感できるか。

(4)　冒頭に，

```
DEFDBL A-Z
```

という一行を加えてみよ。

これによって，計算結果はすべて二倍の桁数になる。　(倍精度)

このとき，上記のｎはどう変わるだろうか。

予想：

実際：

なぜか。

問題３　$S(n)=\Sigma(1/k)$ は「　　　　　」しますよね。これが実際にそうなることを数値的に確認したいと思います。

(1)　ｎをいくつくらいまで計算すると実感できるか予想せよ。　ｎ＝

(2)　プログラムを作れ。

(3)　ｎがいくつ以上になると実感できるか。

和が10を越えるのはいつか。

和が100 を越えるのはいつか。

和が1000を越えるのはいつか。

…………

なぜか

(4)　計算に時間がかかるのを実感すると思うが，実は「計算」に時間がかかっているのではなく，結果の表示に時間がかかっていることの方が多い。

プログラムを工夫せよ。

(5)　…..

(6)　どんなことが分かったか。

８－２　πの計算（１）

πにはいろいろな計算方法がある。その中の有効なものの一つに，級数展開を使った計算方法がある。

問題１　次のプログラムは何を計算しているのか

```
CLS
PRINT ATN (1), ATN (1) * 4
```

問題２　次のようにするとどう変わるか

```
CLS
PRINT ATN (1#), ATN (1#) * 4
```

問題３　しかし，上記の計算は，組み込み関数から正しい値を求めたいというときには有効だが，応用数学での計算方法としては，「掟破り」だ。数学的にまともな方法としては，「級数展開」を使うというのが，$\tan^{-1}x$ のまともな計算方法だろう。次の式がそのためのマクローリン展開である。

$$\tan^{-1}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

これを使って　Arc tan　(1) * 4 を計算せよ。

(1) 第何項まで計算すると，満足できそうな値が得られるだろう。予想せよ。

(2) プログラムを作れ。

(3) 実行せよ。どんなことに気づいたか。

問題４　小寺先生の微積分の本の中に，

「4 $\tan^{-1}$ (1/5) - $\tan^{-1}$ (1/239)　を簡単にせよ」

という問題があった。結果はπ／４になるという。そしてその注として，

「この等式は，円周率πの計算に利用される」

という一文があった。本当か。

(1) 第何項まで計算すると，満足できそうな値が得られるだろう。予想せよ。

(2) プログラムを作れ。

(3) 実行せよ。どんなことに気づいたか。

８－３　マクローリン展開を目で見る。

今度は，マクローリン展開の収束の様子を観察しよう。

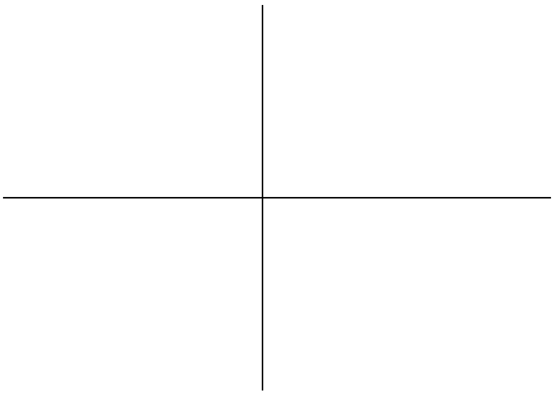
例１　指数関数の展開式は，

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots$$

である。ｎ項までの和でできる関数を　$y = f_n(x)$ とすると，次のプログラムで $f_n(x)$ のグラフの収束する様子を観察することができる。

```
SCREEN 12
MaxOfX = 15
CLS
MaxOfY = MaxOfX * 480 / 640
dp = MaxOfX / 640 / 2
WINDOW (MaxOfX, MaxOfY)- (MaxOfX, -MaxOfY)
LINE (MaxOfX, 0)- (MaxOfX, 0)
FOR i = -INT (MaxOfX) TO INT (MaxOfX)
    LINE (, 10 * dp)- (, -10 * dp)
NEXT
LINE (0, -MaxOfY)- (0, MaxOfY)
FOR i = -INT (MaxOfY) TO INT (MaxOfY)
    LINE (0 * dp, i)- (10 * dp, i)
NEXT
LOCATE 1, 1
PRINT "                    "
LOCATE 1, 1
INPUT "Last Term"; LastTerm
IF LastTerm <= 0 THEN END
FOR Term = 0 TO LastTerm
    LOCATE 2, 2 * Term + 1
    COLOR Term MOD 7 + 1
    PRINT Term;
    COLOR 7
    FOR x = -MaxOfX TO MaxOfX STEP dp
        '**************************************
```

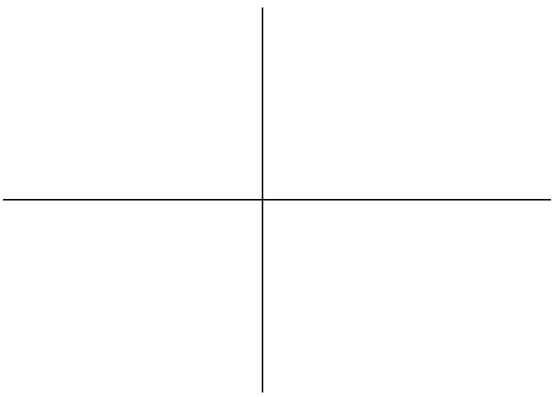
```
        y = 0
        FOR i = 0 TO Term
            Bunbo = 1
            FOR j = 1 TO i
                Bunbo = Bunbo * j
            NEXT
            y = y + (x ^ i) / Bunbo
        NEXT
        '***************************************
        IF ABS(y) < MaxOfY THEN PSET (x, y), Term MOD 7 + 1
    NEXT
NEXT
```



気づいたこと

問題１　次の式を利用して　ｙ　＝　ｓｉｎ　ｘ　について調べよ。

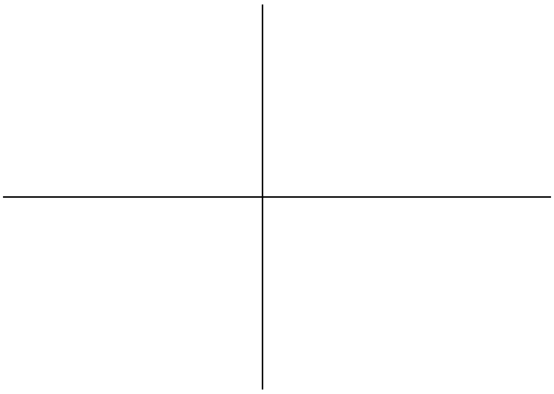
$$\mathrm{sin}\ x = \frac{x}{1} - \frac{x^{2}}{3!} + \frac{x^{3}}{5!} - \frac{x^{4}}{7!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$



気づいたこと

問題２　次の式を利用して　$y = \tan^{-1}x$　について調べよ。

$$\tan^{-1}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$



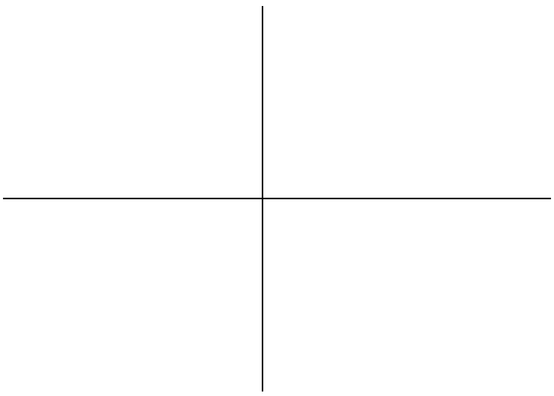
気づいたこと

８－４　課題

微分積分のテキスト等を調べてみると，様々な関数のマクローリン展開の例がある。上記では，その中の３つだけを扱ったが，自分なりに例を探し，その級数の収束の様子をスケッチせよ。

例１　級数展開

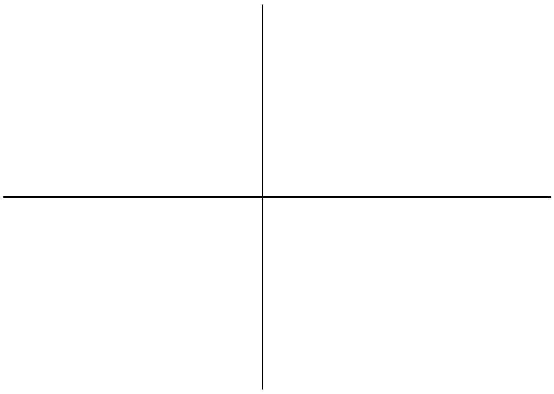
＝



気づいたこと

例２　級数展開

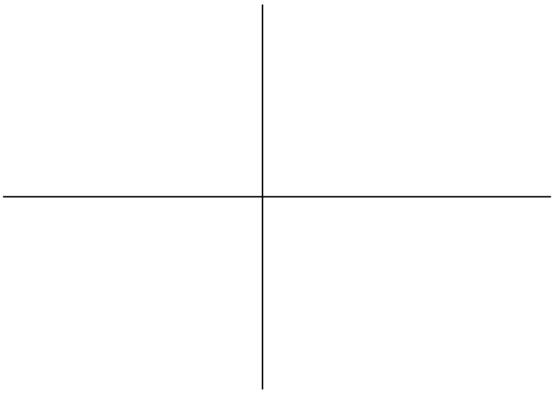
＝



気づいたこと

例３　級数展開

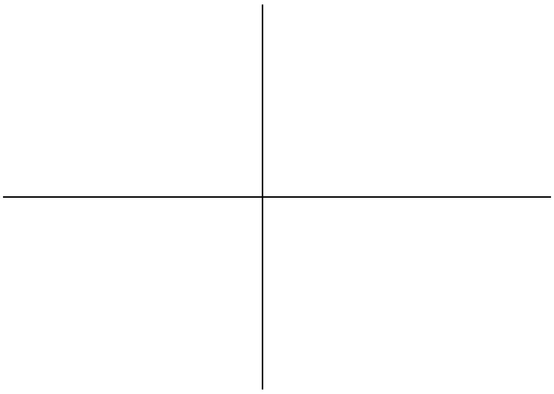
＝



気づいたこと

例４　級数展開

＝



気づいたこと

（以上）

なお，1998年度の後期は，鈴木先生，小谷先生が担当になりました。